será $\frac{x^3}{3}$ MENOS el valor del extremo inferior, que será $\frac{0^3}{3}$

por lo tanto, esto sale que es 9.

TEMA 6: INTEGRAL INDEFINIDA

15/04/21

PRIMITIVA DE UNA FUNCIÓN:

La función F(x) es una func primitiva de otra func f(x) si la derivada de la F es f(x)

$$F(x) \text{ primitiva } f(x) \leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

Si F(x) es primitiva de f(x), entonces todas las funciones F(x) + C que pueda construir dando valores a C, también serán primitivas de f(x).

Si derivo F(x) + C, la derivada de una constante es 0, con lo que queda F(x).

Encontrar una primitiva es encontrar una familia de funciones primitivas. Porque son infinitas y porque la constante puede tener infinitos valores.

Cuando hablemos de integrales indefinidas, no definidas, que no tengan intervalo, cuando pongamos la respuesta siempre pondremos + C o + K (de constante).

INTEGRAL INDEFINIDA: Es el conjunto formado por todas las primitivas.

Cuando integro f(x) es buscar una primitiva + constante

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Propiedades

- Integrar constante × una func, la constante sale fuera y es integrar la func.

$$\int a \cdot f(x)dx = a \cdot \int f(x)dx$$

- $\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

- la integral de 0 es una constante

- $\int 0\, dx = C$

- $\int K\, dx = Kx + C$

Tabla de integrales inmediatas

- Regla de la potencia

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1 \qquad \int f^n \cdot f' dx = \frac{f^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

- Cocientes

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \qquad \int \frac{f'}{f} dx = L|f| + C$$

$$\int \frac{1}{x^n} dx = \frac{x^{-n+1}}{-n+1} + C, \quad n \neq 1 \qquad \int \frac{f'}{f^n} dx = \frac{f^{-n+1}}{-n+1} + C, \quad n \neq 1$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C \qquad \int \frac{f'}{1+f^2} dx = \operatorname{arctg} f + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C \qquad \int \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}\,dx = \arcsin f + C$$

- Exponenciales

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int e^f \cdot f'\,dx = e^f + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{La} + C \qquad \int a^f \cdot f'\,dx = \frac{a^f}{La} + C$$

- Trigonométricas

$\int \cos x dx = senx + C$	$\int \cos f \cdot f'dx = senf + C$
$\int senxdx = -\cos x + C$	$\int senf \cdot f'dx = -\cos f + C$
$\int tgxdx = L\lvert\sec x\rvert + C$	$\int tgf \cdot f'dx = L\lvert\sec f\rvert + C$
$\int \sec^2 xdx = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \int (1+tg^2x)dx =$ $= tgx + C$	$\int \sec^2 f \cdot f'dx = \int \frac{f'}{\cos^2 f}dx = \int (1+tg^2 f)\cdot f'dx =$ $= tgf + C$
$\int cosec^2 xdx = \int \frac{1}{sen^2 x}dx = \int (1+\cot g^2 x)dx =$ $= -\cot gx + C$	$\int cosec^2 f \cdot f'dx = \int \frac{f'}{sen^2 f}dx = \int (1+\cot g^2 f)\cdot f'dx =$ $= -\cot gf + C$

INTEGRALES INMEDIATAS

Este método consiste en transformar la func dada mediante las tablas que revisamos recién.

a) $\int x^5\,dx \longrightarrow$ Se utiliza la regla de la potencia, es del tipo $x^n \rightarrow \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$

Aquí $n = 5$ $\quad \frac{x^{5+1}}{5+1} = \frac{x^6}{6} + C$

b) $\int \frac{3x^2+1}{x^3+x+5}\,dx$

Tengo en el numerador la derivada del denom., me sirve la tabla $\int \frac{f'}{f}\,dx = L\,|f| + c$

$\ln|x^3+x+5| + C$

c) $\int \cot g\, x\, dx = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\,dx$

1º poner la definición de cotg. $= \frac{\cos}{\operatorname{sen}}$
2º sabemos q̃ derivada de sen es cos. Aplica misma tabla q̃ en ej. anterior

$\ln|\operatorname{sen} x| + C$

d) $\int e^{\operatorname{sen} x} \cos x\, dx$

Si tengo e^f y además tengo la derivada de f, es e^f
$\int e^f \cdot f'\,dx = e^f + C$
cos es la derivada de sen.

$e^{\operatorname{sen} x} + C$

INTEGRACIÓN POR PARTES

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx$$

Que tb. se puede contar de esta forma:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

u diferencial de v es igual a u por v menos la integral de v por du.

Tengo 2 funciones una función u y una función derivada, g(x) sería v
g'(x) sería dv
f(x) sería u

Hay que saber identificar u y dv
luego calcular $du \rightarrow$ coger u y derivar
calcular $v \rightarrow$ integrar dv

$\int x \operatorname{sen} x \, dx$ → Intento escribir quien es u de v
Si a u le llamo x y al $\operatorname{sen} x \, dx$ lo llamo dv,
el dv lleva el dx, seguro.
Tengo $x = u$
$dv = \operatorname{sen} x \, dx$

A partir de u calculo du → derivada de x → dx
$dv = \operatorname{sen} x \, dx$ → hago la integral. Para conseguir v tengo que integrar a ambos lados de la ecuación

Integral con diferencial queda v

Integral $\operatorname{sen} x$ es $-\cos x$

$v = -\cos x$

Teniendo en cuenta actores puedo aplicar la fórmula:
$\int u \, dv = uv - \int v \, du$
$u = x$
$v = -\cos x$

se transforma en una integral inmediata

$-x \cos x + \int \cos x \, dx$
↓ integral (tabla)
$-x \cos x + \operatorname{sen} x + C$

$\int x \cdot \operatorname{arctg} x \cdot dx$
$$\begin{cases} u = \operatorname{arctg} x \Rightarrow du = \dfrac{1}{1+x^2}dx \\ dv = x\,dx \rightarrow v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$$

Con esto puedo calcular quien es du y quien es v:
derivar $u \Rightarrow du$
$dv = x\,dx \rightarrow$ integrar x $\quad \int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$

$$\frac{x^{1+1}}{1+1} = \frac{x^2}{2}$$

Ya tenemos los cuatro actores: u v v du

Fórmula: $uv - \int v\,du$ $\qquad \operatorname{arctg} x \quad \dfrac{x^2}{2} \qquad \dfrac{1}{1+x^2}dx$

$$\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2}dx$$

Saco el $\frac{1}{2}$ fuera de la integral xq es constante

$$\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$$

Si el grado del numerador es igual que el grado del denominador, en este caso x^2, en una integral polinómica, lo 1º que se hace es la división polinómica.

$$\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

Como la integral funciona bien con sumas y restas es integrar por un lado el 1 y por otro el $\dfrac{1}{1+x^2}$

Integrar el 1, como es $1\,dx$, es x

Integral de $\frac{1}{1+x^2}$, es inmediata, es el $\operatorname{arctg} x + C$

Quedaría entonces,

¿?

$$\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C$$

$\int e^x \operatorname{sen} x\,dx$ $\quad u = e^x \Rightarrow du = e^x\,dx$

$\quad dv = \operatorname{sen} x\,dx \rightarrow v = -\cos x$

Con u calculo $du = e^x$

Con dv calculo $v \rightarrow$ integrar $\operatorname{sen} x\,dx = -\cos x$

Los cuatro actores u $\quad v$ $\quad vdu$ $\qquad$ Formula $uv - \int vdu$

$e^x \quad -\cos x \quad e^x$

$$-e^x \cos x + \int \cos x \cdot e^x\,dx$$

Como me queda casi igual, trabajo con el trozo de integral y vuelvo a hacerlo por partes

$\int \cos x\, e^x\,dx$ $\quad u = e^x \Rightarrow du = e^x\,dx$

$\quad dv = \cos x\,dx \Rightarrow v = \operatorname{sen} x$

Con u calculo $du \rightarrow$ derivar $u = e^x$

Con dv calculo $v \rightarrow$ integrar $\cos x\,dx = \operatorname{sen} x$

Aplico formula $uv - \int vdu$

$$e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\,dx$$

Entonces,

$$-e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\, dx$$

Tengo que la 1ª integral, la del enunciado es

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\, dx$$

Podría llamar I a $\int e^x \operatorname{sen} x\, dx$

$$I = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - I \quad / \text{Sumo } I \text{ a ambos lados}$$

$$2I = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x \cancel{-I} \cancel{+I}$$

$$\frac{\cancel{2}I}{\cancel{2}} = \frac{-e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x}{2} \quad / \text{Divido por } 2$$

$$I = \frac{-e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x}{2}$$

$$I = \frac{e^x}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x) + C$$

INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES

Son de la forma $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$

Si el grado del numerador $P(x)$ es MAYOR O IGUAL que el grado del denominador, se divide y obtenemos:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx = \int c(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}\, dx$$

$C(x)$
Cuando divido dividendo en le divisor, sera cociente MÁS resto $R(x)$ entre divisor $Q(x)$.

Factorizamos el denominador y descomponemos en fracciones simples de la sgte forma.
Fijarse que siempre va a quedar el mismo denominador $Q(x)$ que es el que tengo que factorizar siempre.
Ahora $R(x)$ va a tener un grado MENOR estricto que el de $Q(x)$ y es el resto.

Dependiendo de la factorizaç de $Q(x)$, si obtengo una raíz real simple $x=a$ se obtiene una fracción de la forma $\frac{A}{x-a} \rightarrow$ A mayuscula es una constante que hay que buscar.

Si obtengo una raíz real b, $x=b$, de multiplicidad n, es decir que $x=b$ tiene varias repetides como raíz, por ejemplo $x^3=0$, sus raíces son $x=0$ tres veces, porque está elevado al cubo. Obtenemos n fracciones de esta forma

$$\frac{B}{x-b}, \frac{B}{(x-b)^2} \dots \frac{B}{(x-b)^n}$$ hasta la multiplicidad de la raíz.

Si tengo un par de raíces imaginarias conjugadas, es de esta forma $\frac{Mx+N}{(x-a)^2+b^2}$

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+3} =$$

1º veo si en el numerador tengo la derivada del de abajo.

Veo que no hay nada, el grado del de arriba es 0. Ahora veo el de abajo, 2. No hay que hacer la divis

Hay que descomponer el numerador en factores

$x^2 + 2x + 3$

$x_1 = -1 + \sqrt{2}i$

$x_2 = -1 - \sqrt{2}i$

No hay raíces reales, las 2 son imaginarias.

Tengo que tratar de convertirlo y llevarlo a un arctg. Y la integral del arctg era $\frac{dx}{1+x^2}$

Tengo que tener un 1 en el número y en el x tendrá que estar elevado al cuadrado

$x^2 + 2x + 3 \rightarrow$ Lo puedo reescribir así

$(x+1)^2 + (\sqrt{2})^2 \rightarrow$ completar cuadrados

Ahora tengo que hallar quién es M y quién es N. Tienen que ser igual a 1, porque el numerador es 1

Para que haya 1 y no haya x, la M tiene que valer 0 y en N tiene que valer 1

$M = 0$

$N = 1$ Entonces tengo

$$\frac{1}{(x+1)^2 + (\sqrt{2})^2}$$

Tengo que intentar llevar el $(\sqrt{2})^2$ a un 1 y para eso divido entre 2. Pero entonces tengo que dividir a todo entre 2

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{(x+1)^2}{2}+\frac{(\sqrt{2})^2}{2}} = \int \frac{\frac{1}{2}\,dx}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}$$

Ahora aplico las reglas de las integrales, que la constante sale fuera, cojo el 1/2 y lo llevo fuera

$$\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}$$

En la tabla el arctg es

$$\int \frac{f'}{1+f^2}\,dx = \operatorname{arctg} f + C$$

El $1+f^2$ es lo que he tendido a buscar. Ahora necesito que arriba este f', es decir, la derivada de lo que está elevado al cuadrado.

La derivada de $\frac{x+1}{\sqrt{2}}$ es el coeficiente de la x que es $\frac{1}{\sqrt{2}}$, entonces necesito arriba $\frac{1}{\sqrt{2}}$ y si pongo $\frac{1}{\sqrt{2}}$ arriba necesito dividir por $\frac{1}{\sqrt{2}}$ en todo.

Y así ya tengo el arctg de f

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+C$$

$$\int \frac{12x^3-8x^2+9x+5}{6x^2-7x+2}\,dx$$

Como grado del numer. es + grande q̃ grado del denom., hago la div. polinómica

División polinómica es una suma.
Integro una por un lado y otra por otro

$$(2x+1)+\frac{12x-7}{6x^2-7x+2}$$

$$\int (2x+1)\,dx + \int \frac{12x-7}{6x^2-7x+2}\,dx$$

Integral de $2x$, el 2 sale fuera.
Integral de $x^1 = \frac{x^2}{2}$
Con el 2 q̃ salió fuera se simplifica $= x^2$

Integral de $1 = x$

Son inmediatas, ir a las tablas

Como tengo a bien q̃ la suma puedo romper

lo de arriba es la derivada de lo de abajo

tabla $\rightarrow \int \frac{f'}{f}\,dx = L|f| + C$

$$x^2+x+\ln|6x^2-7x+2|+C$$

$$\int \frac{2x+1}{x^2-3x+2}\,dx$$

Grado numer. $=1$, grado denom $=2$, No hay que hacer divis. Hay que sacar las raíces del denominador.

$x_1 = 2 \quad x_2 = 1$

$(x-2)(x-1)$

Raíces reales simples, se obtiene una fracción $\frac{A}{x-a}$ $a \rightarrow$ raíz

$$\int \frac{2x+1}{(x-2)(x-1)}\,dx$$

Me queda la fracción del estilo $\frac{A}{x - \text{la raiz}}$

$\frac{A}{x-1}$ $\frac{B}{x-2}$

$$\int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} \right) dx$$

Suma fracciones:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{(1 \cdot 4) + (2 \cdot 1)}{8}$$

Hago cuentas.

$$\begin{aligned} 2x+1 &= A(x-2) + B(x-1) \\ 2x+1 &= (A+B)x - 2A - B \end{aligned} \quad \begin{cases} A + B = 2 \\ -2A - B = 1 \end{cases} \quad \begin{aligned} A &= -3 \\ B &= 5 \end{aligned}$$

$$\int \frac{-3}{x-1} dx + \int \frac{5}{x-2} dx$$

Saco el -3 fuera y queda $\frac{dx}{x-1}$ → la derivada de x es 1 y 1 es la derivada de $x-1$

tabla

$-3 \ln|x-1|$

Saco 5 fuera y queda $\frac{dx}{x-2}$ → misma situación

$5 \ln|x-2|$

Junto las dos → $-3 \ln|x-1| + 5 \ln|x-2| + C$

$$\int \frac{4}{x^4-1}\,dx$$

x^4 tendrá 4 raíces. Hay que ver cómo son, reales, de multiplicidad cuádruple, imaginarias.

Descompongo x^4-1

$(x^2+1)(x+1)(x-1)$ ⟶ Tengo 2 raíces reales y una imaginaria

$$\frac{4}{(x^2+1)(x+1)(x-1)}$$

Ahora armo las fórmulas. Raíces imaginarias

$$\frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{x-1} \qquad \frac{Mx+N}{(x-a)^2+b^2}$$

Hago cuentas

$$\frac{(Ax+B)(x^2-1) + C(x^2+1)(x-1) + D(x^2+1)(x+1)}{x^4-1}$$

??

Tengo que igualar a 4 (el numerador).
Saco los factores en x^3, x^2, x, todos esos coeficientes los igualo a 0 y el término independiente lo igualo a 4.
Y obtengo el valor de A, B, C y D.

$x=1$, es $4=4D$
$x=-1$, es $4=-4C$
$x=0$, es $4=-B-C+D$
$x=2$, es $4=6A+3B+5C+15D$

Así $D=1$, $C=-1$, $B=-2$ y $A=0$

Ahora integro, como es una suma, puedo integrarlas x separado:

$$\int \frac{4}{x^4-1} = \int \frac{4}{(x^2+1)(x+1)(x-1)} = \int \frac{Ax+B}{x^2+1} + \int \frac{C}{x+1} + \int \frac{D}{x-1}$$

$$\int \frac{-2}{x^2+1} = -2\int \frac{dx}{x^2+1} = \text{arctg}\,x$$

$$\int \frac{-1}{x+1} \to -\ln|x+1|$$

$$\int \frac{1}{x-1} \to \ln|x-1|$$

$$-2\text{arctg}\,x - \ln|x+1| + \ln|x-1| + C$$

INTEGRACIÓN POR CAMBIO DE VARIABLE

Hay que encontrar en la func que quiero integrar una expres cuya derivada también esté como factor, es decir, multiplicando o dividiendo, en dicha func a integrar.

Sustituimos $g(x)$ por t → cambio de variable, con lo cual derivamos en ambos lados $g'(x)$ será la derivada de t.

Integramos la func en t

Deshago el cambio de variable para volver a la variable x.

$$\int 2x(x^2+5)^{25}dx$$

Tengo un factor $2x$ que es la derivada del paréntesis. Al paréntesis lo llamo t

$x^2+5=t$ ← Cambio variable

$2x\,dx = dt$ ← Derivo

Puedo cambiar $2x\,dx$ por dt y tengo $(x^2+5)^{25}$ → x^2+5 es t $= t^{25}$ ⇒ $\int t^{25}dt$

$\int t^{25} dt$ ← Integral inmediata, tabla

$\frac{t^{25+1}}{25+1} = \frac{t^{26}}{26} + C$

Ahora hay que deshacer el cambio de variable

t valía (x^2+5) $= \frac{(x^2+5)^{26}}{26} + C$

Siempre que hago un cambio de variable, parto de una variable x y todo lo que queda p' poder integrar tiene que ser en t, en otra variable. No puedo mezclar x y t. Todo se lleva a la nueva variable.

$\int \frac{5}{x \ln x} dx$ La derivada de ln es $\frac{1}{x}$ y lo tengo

Voy a hacer cambio de variable. A ln x lo llamaré t → ln x = t
¿Cuál es su derivada?

$\ln x = t$

La derivada en este lado respecto de x es $\frac{1}{x} dx$

La derivada en este lado es dt

$\frac{1}{x} dx = dt$ ← Despejo quien es dx

$dx = x\,dt$

y ahora sustituyo $\frac{5}{x \cdot t} x\,dt = \frac{5}{t} dt$

$$\int \frac{5\,dt}{t}$$ El 5 sale fuera

$$5\int \frac{dt}{t}$$ ← Integral inmediata → $\int \frac{f'}{f}dx = \ln|f| + C$

$5\ln|t| + C$

Deshago cambio de variable: $5\ln|\ln x| + C$

INTEGRALES TRIGONOMÉTRICAS

Las integrales del tipo: $\int \text{sen}^m x \cdot \cos^n x\,dx$, si al menos uno de los 2 exponentes es impar usamos esta relación trigonométrica: $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

Si los 2 exponentes son pares, usamos el ángulo doble:

$$\text{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

Del tipo: $\int \text{sen}(mx) \cdot \cos(nx)\,dx$
$\int \text{sen}(mx) \cdot \text{sen}(nx)\,dx$
$\int \cos(mx) \cdot \cos(nx)\,dx$

Se emplean las fórmulas

$$\text{sen}(mx) \cdot \cos(nx) = \frac{1}{2}\left[\text{sen}(m+n)x + \text{sen}(m-n)x\right]$$

$$\text{sen}(mx) \cdot \text{sen}(nx) = \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right]$$

$$\cos(mx) \cdot \cos(nx) = \frac{1}{2}[\text{sen}(m+n)x + \cos(m-n)x]$$

Func con razones trigonométricas : $\int f(\text{sen}x, \cos x)\,dx$

El cambio de variable más utilizado es: $t = tg(x/2)$

Y como $t = tg(x/2) \Rightarrow t$ es tangente de $x/2$, puedo sacar quien es diferencial de t dt, puedo sacar quien es el seno de t y el coseno de t.

$\int \text{sen}^3 x\,dx$ ← Exponente impar, se usa $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

Para usar la formula convierto el sen^3 en $\text{sen}x \cdot \text{sen}^2 x\,dx$

y el sen^2 es $1 - \cos^2 x$

y luego hago cuentas

$\int \text{sen}x\,\text{sen}^2 x\,dx$

$\int \text{sen}x(1-\cos^2 x)\,dx = \int \text{sen}x - \int \text{sen}x\cos^2 x\,dx$

Integral inmediata

$-\cos x$

Cambio variable

$u = \cos x$

diferencial de u → $du = -\text{sen}x\,dx$

derivada de u

$-\int \text{sen}x \cos^2 x\,dx$

meto signo adentro

$+\int u^2\,du = \frac{u^3}{3}$

Deshago cambio $\frac{\cos^3}{3}$ $= -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$

$\int sen^2 x\, dx$ ← Como es de orden par hay que usar el angulo doble.

Sustituyo sen^2 por su equivalente en angulo doble que es $\frac{1-\cos 2x}{2}$

$$\int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \int \frac{1}{2}\,dx - \int \frac{\cos 2x}{2}\,dx = \frac{x}{2} - \frac{sen\, 2x}{4} + C$$

$\int sen(2x)\cdot \cos(4x)\,dx$

Sen de algo por cos de algo que no es x. Vamos a la formula: seno de la suma de los angulos MAS el $\frac{1}{2}$ del seno de la diferencia de los angulos.

Pongo el mas grande primero, el 4 y el segundo el otro para que no me de negativo (por comodidad, porque no está mal si queda negativo.

$$\frac{1}{2}\int sen((2+4)x)\,dx + \frac{1}{2}\int sen\, 2x\, dx$$

$$\frac{1}{2}\int sen\, 6x\, dx + \int sen\, 2x\, dx$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{\cos 6x}{-6} + \frac{1}{2}\,\frac{\cos 2x}{-2} = -\frac{\cos 6x}{12} - \frac{\cos 2x}{4} + C$$

CAMBIO GENERAL $tg(x/2) = t$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\tan x = \frac{2t}{1-t^2} \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Con este cambio de variable tengo estas 4 opciones de pasar las x a t.

$$\int \frac{1}{2+\cos x}\,dx$$

El 2 del denominador molesta y hay que aplicar tangente de x/2, ese cambio.

1 lo dejo ; 2 lo dejo

cos x lo cambio

dx lo cambio

$$\frac{1}{2+\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

$$\cancel{(1+t^2)}\left(\frac{1-t^2}{\cancel{(1+t^2)}}\right)+2 = 2+1-t^2$$

$$-t^2+3$$

¿?

¿?

Hago cuentas $\int \frac{2}{t^2+3}\,dt$

Saco el 2 afuera $2\int \frac{1}{t^2+3}\,dt$

¿?

Sé que si llego a tener t^2+1 es arctg, entonces divido a todo entre 3. Si divido entre 3, multiplico por 3 para que quede todo igual.

Al dividir entre 3, al tener un cuadrado necesito meterlo como raíz cuadrada de 3 al cuadrado, que es mi 3. y multiplico por $\frac{1}{\sqrt{3}}$

¿?? $\frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)$

$\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right) + C$

INTEGRALES CAMBIO TRIGONOMÉTRICO

$\int f(x, \sqrt{a^2-x^2})\,dx$ cuando tengo la raíz cuadrada de un número MENOS x^2 se hace este cambio:

$x = a\,\mathrm{Sen}\,t \rightarrow dx = a\cos t\,dt$

y queda así

$\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-a^2\mathrm{Sen}^2 t} = \sqrt{a^2(1-\mathrm{Sen}^2 t)} = a\cos t$

$\int f(x, \sqrt{a^2+x^2})\,dx$ cuando tengo con un MAS usamos este cambio:

$x = a\,\mathrm{Tg}\,t \rightarrow dx = \frac{a}{\cos^2 t}\,dt$

La raíz queda así

$\sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2+a^2\mathrm{Tg}^2 t} = \sqrt{a^2(1+\mathrm{Tg}^2 t)} = a\,\mathrm{Sec}\,t = \frac{a}{\cos t}$

$\int f(x, \sqrt{x^2 - a^2})\,dx$ Cuando el x^2 va primero se usa este cambio:

$$x = \frac{a}{\operatorname{sen} t} \rightarrow dx = -\frac{a \cos t}{\operatorname{sen}^2 t}\,dt$$

Y la raíz queda de esta forma

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{\operatorname{sen} t}\right)^2 - a^2} = \sqrt{a^2\left(\frac{1}{\operatorname{sen} t} - 1\right)} = \sqrt{a^2\left(\frac{\cos^2 t}{\operatorname{sen}^2 t}\right)} =$$

$a \cot g t$

$\int \sqrt{1 - 4x^2}\,dx$ ← Es el 1º, el cambio será $x = a \operatorname{sen} t \rightarrow dx = a \cos t\,dt$

$$\int \sqrt{1 - (2x)^2}\,dx$$

Hago el cambio de variable $2x = t$, con lo cual, al derivar $2dx = dt$ y se obtiene

$$\int \sqrt{1 - 4x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{1 - t^2}\,dt$$

¿?

Y ahora hago otro cambio de variable que es aplicar lo que hemos visto
$t = \operatorname{sen} u$ por lo tanto dt es $\cos u\,du$ y hago las cuentas

$\frac{1}{2}\int \cos^2 u\,du$ ⟶ Sabemos hacerla, es de orden par, ángulo doble

$$\frac{1}{2}\left(\frac{u}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2u}{4}\right)$$

Deshago el cambio de variable. De u tengo que volver a t

$$\frac{1}{4}\left(\arcsen t + t\sqrt{1-t^2}\right)$$

y de t vuelvo a las x

$$\frac{1}{4}\left(\arcsen 2x + 2x\sqrt{1-4x^2}\right) + C$$

REPASO

$$\sqrt{x^2-4x+8}$$

DOMINIO: No hay raíces reales, o siempre es positivo o siempre es negativo

$$x^2-4x+8 \geq 0 \qquad x_1 = 2+2i$$
$$x_2 = 2-2i$$

Como es siempre positivo doy un valor cualquiera, $x=0$

$$0^2 - 4\cdot 0 + 8 = 8 \leftarrow \text{Positivo}$$

↓

Lo de dentro siempre es positivo

↓

Todo $\mathbb{R}$ es su dominio

CORTE CON LOS EJES: Igualar a 0. Ya vimos que no hay soluc., lo que significa que no existe corte en eje x.
Para eje y sustituimos

$$\sqrt{0^2-4\cdot 0+8} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \qquad (0, 2\sqrt{2})$$

Punto de corte

Deshago el cambio de variable. De u tengo que volver a t

$$\frac{1}{4}\left(\arcsen t + t\sqrt{1-t^2}\right)$$

y de t vuelvo a las x

$$\frac{1}{4}\left(\arcsen 2x + 2x\sqrt{1-4x^2}\right) + C$$

REPASO

$$\sqrt{x^2-4x+8}$$

DOMINIO: No hay raíces reales, o siempre es positivo o siempre es negativo

$$x^2-4x+8 \geq 0 \qquad x_1 = 2+2i \qquad x_2 = 2-2i$$

Como es siempre positivo doy un valor cualquiera, $x=0$

$$0^2 - 4\cdot 0 + 8 = 8 \leftarrow \text{Positivo}$$

↓

Lo de dentro siempre es positivo

↓

Todo $\mathbb{R}$ es su dominio

CORTE CON LOS EJES: Igualar a 0. Ya vimos que no hay solus, lo que significa que no existe corte en eje x.
Para eje y sustituimos

$$\sqrt{0^2-4\cdot 0+8} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \qquad (0, 2\sqrt{2})$$

Punto de corte

SIMETRÍA: Normalmente las irracionales no son simétricas

ASÍNTOTAS:

Horizontal: $\lim\limits_{x \to \infty}$ Si da un número, existe

$\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{x^2 - 4x + 8}$ El término + grande es $\sqrt{x^2}$, que es x y cuando $x \to \infty$, se va a infinito.

No existe.

Vertical: No hay. Lo sé porque el dominio es todo $\mathbb{R}$, no puede haber asíntota vertical que corte.

Oblicuas:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

El orden más grande es $\sqrt{x^2}$, que es x, con lo cual $\frac{x}{x}$, el límite se va a 1.

¿? pensar

Como tengo 1, tengo n.

$$n = \lim_{x \to \infty} \left(f(x) - 1 \cdot x \right) = 2$$

$\infty - \infty$ multiplicado por el conjugado

$$y = x + 2$$

$$n = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - (-1) \cdot x \right) = -2$$

$$f(x) + x = -2$$

$$y = -x + 2$$

Las asíntotas oblicuas son dos:

$y = x + 2$
$y = -x - 2$

¿?

EXTREMOS RELATIVOS Hay que derivar e igualar a 0

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 8} \qquad f'(x) = \frac{2x - 4}{2\sqrt{x^2 - 4x + 8}}$$

$$2x - 4 = 0$$
$$2x = 4$$
$$x = 2$$

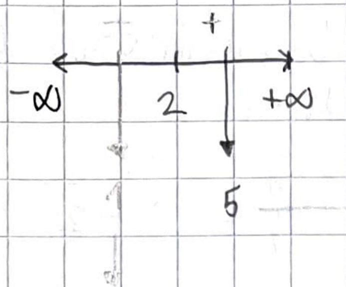
$$f''(x) = \frac{4}{(x^2 - 4x + 8)\sqrt{x^2 - 4x + 8}}$$

El signo es positivo → sé que es un mínimo
la 2ª derivada es de orden par y es ≠ de 0 cuando anula a la primera, tenemos un MÍNIMO.

Sé que la coordenada x vale 2, tengo que ver cuanto vale y

$$\sqrt{2^2 - 4 \cdot 2 + 8}$$
$$4 - 8 + 8 = \sqrt{4} = 2 \qquad \text{Punto } (2, 2)$$

MONOTONÍA Mi punto importante es el 2, que es un mínimo. Hay que ver que ocurre a los lados



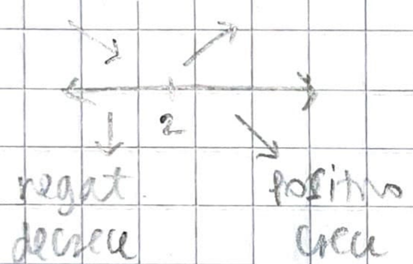
→ Lo meto en la 1ª derivada

$$\frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+8}}$$

$$\frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+8}}$$

$$\frac{2\cdot 5-4}{2\sqrt{5^2-4\cdot 5+8}} = 0,83$$

$$\frac{2\cdot 1-4}{2\sqrt{1^2-4\cdot 1+8}} = -0,44$$



PUNTO DE INFLEXIÓN La segunda derivada se iguala a 0. En este caso no hay punto de inflexión.

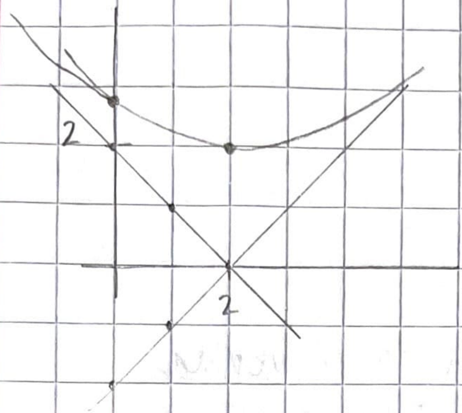
$$\frac{4}{(x^2+4x+8)\sqrt{x^2-4x+8}} = 0$$

$4 = 0$ No existen

Para representar: Qué tenemos:

Dominio: Todo $\mathbb{R}$
Corte en eje y $(0, 2\sqrt{2})$
Asíntotas: $y = x+2$
$y = -x+2$

Mínimo en 2,2



$y = -x + 2$

$y = x - 2$

x	0	1	2
y	2	1	0

x	0	1	2
y	-2	-1	0

$y = -x + 2$

$-(2) + 2$

$y = 2 - 2$

$y = x + \sqrt{\frac{1}{x}}$

Dominio lo de la raíz debe ser positivo y $\neq$ de 0

$x > 0 \rightarrow \mathbb{R}$ positivos $(0, +\infty)$

la raíz de MENOS algo no existe.

Corte ejes Igualar a 0

$0 = x + \sqrt{\frac{1}{x}}$ $\quad -x = \sqrt{\frac{1}{x}}$

No puede ser. Tengo $-x$ y la raíz es positiva, por lo tanto no existe corte con eje x.

Para ver y, evaluo en 0

$y = 0 + \sqrt{\frac{1}{0}}$ No puede ser tampoco corta a Y.

Signo: Será positivo, porque el dominio son solo positivos. Sé que estará en eje de la derecha y x encima de x.

Asíntotas ¿Hay algún x tal que si me acerco a él, la f(x) de infinito? Claro, el cero. Pero el cero POR DERECHA.

$$\lim_{x \to 0^+} \left(x + \sqrt{\frac{1}{x}} \right) = \infty$$

Tengo asíntota vertical que es $x = 0^+$ POR DERECHA

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x + \sqrt{\frac{1}{x}} \right) = \infty$$ → No existe asíntota horizontal

¿¿m??

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

Asíntotas
$x = 0$ por derecha
$y = x$

Calcular n, que vale 0

$y = 1 \cdot x + 0$
$y = x$

Extremos Derivar $x + \sqrt{\frac{1}{x}}$

Derivada de $x = 1$

Derivada de $\sqrt{\frac{1}{x}}$ → lo puedo escribir así $\sqrt[2]{\left(\frac{1}{x}\right)^1} = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$

Aplico fórmula $f^n \to n \cdot f^{n-1} \cdot f'$

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{-1/2} \cdot \frac{(0 \cdot 1) - (1 \cdot 0)}{x^2} = \frac{0}{x^2} = 0$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{-1/2} = \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{-1/2} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x}\right)^{-3/2} \to \sqrt{\frac{1}{x^3}} \quad \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x^3}}\right)$ $\quad \frac{1}{2\sqrt{x^3}}$

· Primera derivada

$$1-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$$

Igualar a 0

$1-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}=0$ $\quad$ / mult. x $2\sqrt{x^3}$

$(1\cdot 2\sqrt{x^3})-\left(\frac{1}{2\sqrt{x^3}}\cdot 2\sqrt{x^3}\right)=0\cdot 2\sqrt{x^3}$

$2\sqrt{x^3}-1=0$

$2\sqrt{x^3}=1$

$\sqrt{x^3}=\frac{1}{2}=x^{3/2}=\frac{1}{2}$ $\quad$ elevo a 2

$(a^b)^c=a^{bc}$ $\quad \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$ $\quad x^3=\frac{1}{4}$

$\boxed{x=\sqrt[3]{\frac{1}{4}}}$ ← POSIBLE EXTREMO

Segunda derivada

$1-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$ → sacar constante $\frac{1}{2}$

x^n → Potencia: $n\cdot x^{n-1}$

$0-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^3}}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{3/2}}=-\frac{1}{2}x^{-3/2}$

$\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)x^{-3/2-1}$ $\quad \frac{3}{4}x^{-5/2}=\frac{3}{4x^{5/2}}$ → 2^a derivada

Aquí pongo $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$

y veo signo

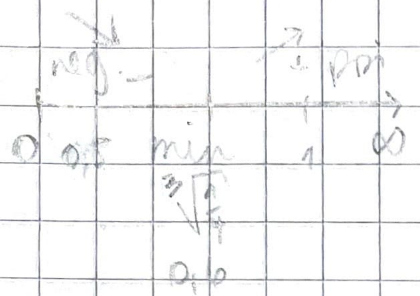
Calculo y

$y = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} + \sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{4}}}} \rightarrow 1,8898$ → Positivo ↗

Por lo tanto tengo un mínimo

$\left(\sqrt[3]{\frac{1}{4}}, 1,8898\right)$

Monotonía: 1ª derivada, signo



Damos valores a ambos lado
Valores muy cercanos a 0.

1ª derivada ⇒ $1 - \frac{1}{2\sqrt{x^3}}$ $\quad 1 - \frac{1}{2\sqrt{0,5^3}} = -0,41$ negativo

Curvatura: necesito 2ª derivada igualar a 0

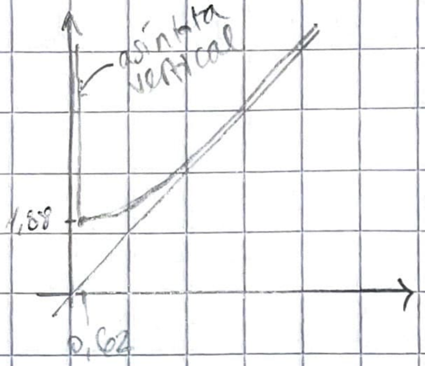
$$\frac{3}{4x^{5/2}} = 0$$

$$3 = 0 \cdot 4x^{5/2}$$

$3 = 0$ → no puede ser, no existen punto de inflexión

Entonces, como ya vi en monotonía que decrece, llega a mínimo y crece, sé que va a ser cóncava en todo su dominio de definición ∪

Para dibujar Sabemos que vive en el 1^{er} cuadrante
que $y = x$ era una asíntota oblicua
y que tiene un min en un punto muy cercano a 0
y que $x = 0$ tb. es asíntota



Pto min
$(0{,}62 \ , \ 1{,}88)$

$y = (1 - x)e^{-x}$ Se puede escribir $\frac{1-x}{e^x}$

Dominio: Todo $\mathbb{R}$

Corte eje x e y

eje y

$y = (1-0)e^{-0}$
$1 \cdot 1$
$y = 1$

$x = 0$ $(0,1)$
$y = 1$ Punto

eje x

$0 = (1-x)e^{-x}$ → 2 nº multiplicados dan 0, uno de los 2 tiene q' ser 0.
e^{-x} nunca es 0
∴ $(1-x) = 0$

$1 - x = 0$
$1 = x$

→ $y = 0$ Punto $(1,0)$
$x = 1$

Puntos corte $(0,1)$
$(1,0)$

Signo El dominio es todo $\mathbb{R}$. Si corta en eje de las x en el 1, lo más normal es que en un sitio esté por arriba y en otro esté por debajo.

$-\infty$ $\quad + \quad$ 1 $\quad - \quad$ ∞

Si coje el 2
$1-2=-1$ negativo

Hasta el 1 la gráfica estará x encima de las x y a partir del 1 por debajo

Asíntotas

Horizontal $\lim_{x\to\infty} (1-x)e^{-x}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1-x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$$

Podemos aplicar L'Hopital, derivar % por su cuenta

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-1}{e^x} \quad \frac{-1}{e^\infty} = \frac{-1}{\infty} = 0$$

Asíntota horizontal
$y=0$ en $+\infty$

$y=0$ es una asíntota cuando x tiende a infinito

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{(1-x)}{e^x} = \frac{(1--\infty)}{e^{-\infty}} = \frac{\infty}{0}$$

$$e^{-\infty} = \frac{1}{e^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$\exists\infty$

No hay asíntota horizontal en $-\infty$

Oblicuas

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \frac{(1-x)e^{-x}}{x} = \frac{1-x}{xe^{x}} \quad \frac{1-\infty}{\infty\cdot e^{\infty}} \quad \frac{-\infty}{\infty} \text{ IND.}$$

$\infty \cdot \infty \rightarrow$

No existen asíntotas oblicuas

Extremos 1ª derivada

Producto
$f' \cdot g + f \cdot g'$

$y = (1-x)e^{-x}$

$0 - 1$

(-1) $\longrightarrow$ derivada $-e^{-x}$

$-1 \cdot e^{-x} + (1-x) \cdot -e^{-x}$

$(-1)e^{-x} + (1-x) \cdot (-e^{-x})$

$-e^{-x} - e^{-x}(-x+1)$

$-(x-1)$

$-e^{-x} - (-e^{-x}(x-1))$

$-e^{-x} + e^{-x}(x-1)$

Factorizar término común e^{-x}

$e^{-x}(-1-1+x)$

$e^{-x}(x-2) \longrightarrow$ 1ª derivada

$\downarrow$

Igualo a 0 $\rightarrow$ Posible punto crítico

$e^{-x}(x-2) = 0 \longrightarrow$ 2 números mult. dan cero, uno tiene que ser cero. e^{-x} no es

$\therefore x - 2 = 0$

$x - 2 = 0$

$\boxed{x = 2} \longleftarrow$ Posible extremo

$y = (1-2)e^{-2}$ Punto $(2, -0{,}1353)$

$y = -1e^{-2}$

$y = -0{,}1353$

2ª derivada

$e^{-x}(x-2)$ $\quad$ $e^{-x} \rightarrow -e^{-x}$ $\quad$ $(x-2) \rightarrow 1$ $\quad$ Producto

$-e^{-x} \cdot (x-2) + e^{-x} \cdot 1$

$-e^{-x}(x-2) + e^{-x}$

Factorizar término común e^{-x}

$e^{-x}(-(-2+x)+1)$

$(2-x)+1$

$e^{-x}(3-x)$

$-(x-3)$

$e^{-x}(-(x-3))$

Simplificar

??

$-e^{-x}(x-3)$

Sustituimos el $x=2$ que habíamos obtenido

??

$-e^{-x}(2-3)$

$-e^{-2}(-1) = -0,1353$ Positivo

Como es positivo tengo un mínimo en $x=2$

Si es $x=2$ tengo que meterlo en func original

???

$y=(1-x)e^{-x}$

$y=(1-2)e^{-2}$

$y=-0,1353$

Punto de inflexión Se calculan en la 2ª derivada e igualo a 0

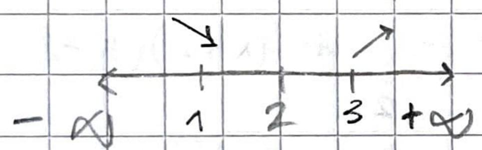
$$-e^x(x-3)=0$$

$$x-3=0$$

$x=3$ → Posible punto de inflexión

Hay que hacer la tercera derivada y comprobar que en 3 es $\neq 0$. Con eso comprobamos que $x=3$ es un punto de inflexión.

Monotonía Como teníamos un mínimo en el 2, el dominio era todo $\mathbb{R}$, a la fuerza en la 1ª derivada se estudia el signo a izq. y dª del 2 y tiene que decrecer y crecer.



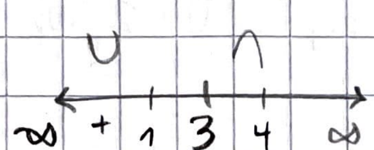
1ª derivada $e^{-x}(x-2)$

$e^{-1}(1-2) = -0,36$ → decrece

$e^{-3}(3-2) = 0,04$ → crece

Curvatura Tengo punto de inflexión en el 3

Segunda derivada
>0 cóncava ∪
<0 convexa ∩

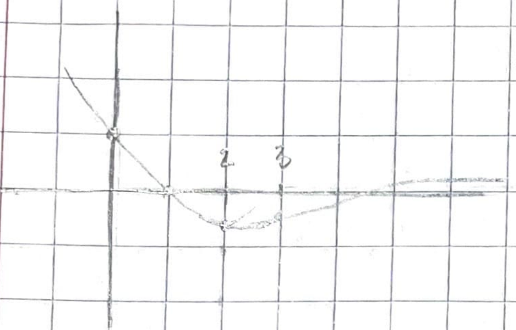


$-e^x(x-3)$

$-e^1(1-3) = 5,43 > 0$, cóncava

$-e^4(4-3) = -54,59$ negat. ∩

Para dibujar



Tenemos min $(2, -0,13)$
eje y $(0,1)$ x $(1,0)$
Asíntota en $y=0$ pero solo en lado positivo
En 3 pasa de cóncava a convexa, pero sigue creciendo asintótica a $y=0$

$\ln(x^2-4)$

Dominio

$x^2-4>0$

$x_1 = 2 \quad x_2 = -2$

$(x+2)(x-2)$

	$-\infty$ a -2	-2 a 2	2 a ∞	
valores	-3	1	3	
$(x+2)$ ①	$-$	$+$	$+$	
$(x-2)$ ②	$-$	$-$	$+$	
$(x+2)(x-2)$	$+$	$-$	$+$	↑ multip. signos $- \cdot -$

→ Doy valores en los rangos

① $-3 \to (-3+2) = -1 \to$ neg
$1 \to (1+2) = 3 \to$ pos
$3 \to (3+2) = 5 \to$ pos

② $-3 \to (-3-2) = -5 \to$ neg
$1 \to (1-2) = -1 \to$ neg
$3 \to (3-2) = 1 \to$ pos

$\underbrace{\ln(x^2-4)}$ → Debe ser >0 $\quad (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$

Cortes con ejes $y = \ln(x^2 - 4)$

$0 = \ln(x^2 - 4)$ → Sabemos que $\ln(1)$ es 0

$x^2 - 4 = 1$
$x^2 - 5 = 0$
$x_1 = \sqrt{5}$ $x_2 = -\sqrt{5}$

Puntos de corte → $-2{,}23$
$(\sqrt{5}, 0)$ y $(-\sqrt{5}, 0)$

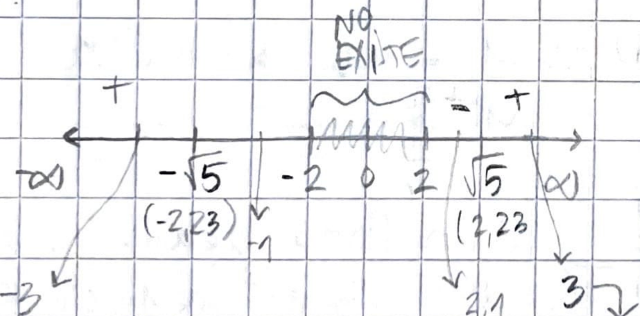
Corte con y → NO HAY

$y = \ln(0^2 - 4)$
$y = \ln(-4)$ ← No existe ln de negativo
No hay corte en eje de Y

Signo Tengo $-\sqrt{5}$ que es un corte en eje x, con lo cual el signo cambiará, luego tengo -2 y 2 (lo que hay entre medio no existe) y tengo $\sqrt{5}$ y lo que hay a continuación

Entre -2 y 2 no existe, hay que calcular el signo del resto.

$\sqrt{5} = 2{,}23$
$-\sqrt{5} = -2{,}23$



$\ln(3^2 - 4) = 1{,}6$ positivo $\ln(3^2 - 4) = 1{,}6$ posi

$\ln((-1)^2 - 4) =$ negativo $\ln((2{,}1)^2 - 4) = -0{,}8$ NEGATIVO

Simetría

Simetría par: $f(x) = f(-x)$

Calculamos $\ln((-x)^2 - 4)$
$\ln(x^2 - 4)$ → es $=$ a $f(x)$ → Simetría par

Asíntotas

Vertical → ya tengo en puntos del dominio donde algo pasa -2 y 2

$$\lim_{x \to 2^+} \ln(x^2-4) = \ln(2^2-4) = \ln(0^+) = -\infty$$

¿?

$$\lim_{x \to 2^-} \ln(2^2-4) = \ln 0^+ = -\infty$$

Hay 2 asíntotas verticales

Horizontal:

$$\lim_{x \to \infty} \ln(x^2-4) = \infty$$ → no hay

Oblicuas

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \quad \frac{\ln(x^2-4)}{x} = \frac{\infty}{\infty} = \text{IND.} \to \text{L'HOPITAL}$$

$$\frac{\frac{2x}{x^2-4}}{1} \to 0$$ → Porque abajo es de orden 2 y arriba 1, con lo cual va a 0

↓

No hay pendiente

↓

No hay asíntota oblicua

¿?

Extremos Derivada de $\ln(x^2-4)$ e igualo a 0

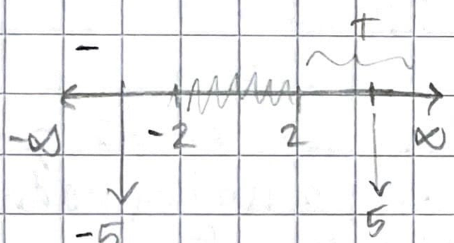
$y' = \frac{2x}{x^2-4}$ $\qquad \frac{2x}{(x^2-4)} = 0$

$2x = 0$

$x = 0$ ← Posible punto extremo

OJO!! 0 no es un punto del dominio, por lo tanto no es ni min ni max ya que no existe

Monotonía



Vemos que ocurre a la derecha en la derivada.

$\frac{2x}{x^2-4} \to \frac{2\cdot 5}{5^2-4} = \frac{10}{25-4} = \frac{10}{21}$ = POSI

$\frac{2\cdot(-5)}{(-5)^2-4} = -\frac{10}{21}$ NEGAT

Curvatura 2ª derivada igualada a 0

$\frac{2x}{x^2-4} = \frac{-2x^2-8}{(x^2-4)^2} = 0 \qquad x = \sqrt{-4}$ → No existe punto de inflexion. No hay valor que anule la 2ª derivada

Para saber signo: cogemos un nº grande, x ej: 4

$$\frac{-2\cdot 4^2-8}{(4^2-4)^2} = \frac{-40}{144} = \text{NEGATIVO } \cap$$

Monotonía
1º derivada: $+$ | $-$
Crecim. decrec.: -2 | 2 | 4

Curvatura: -3 | 4
2º derivada: $\cap$ | $\cap$

$$\frac{-2\cdot(-3)^2-8}{((-3)^2-4)^2} = \frac{-26}{25} \quad \text{NEGATIVO } \cap$$

No hay punto de inflexión, pero siempre es convexa.

PARA DIBUJAR: Tenemos asíntotas verticales en -2 y 2
Sabemos que entre -2 y 2 no hay nada
Decrece hasta -2, corta en $-\sqrt{5}$ y
corta en $\sqrt{5}$. Decrece y es asintótica a
la recta vertical